DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2020A069

紧优无向双环网络强彩虹连通数的下界估计*

刘杰[1,2]，陈宝兴[1,3]，钟玮[1,3]

1. 闽南师范大学计算机学院，福建 漳州 363000
2. 三明医学科技职业学院，福建 三明 365000
3. 福建省高等学校数据与智能应用重点实验室，福建 漳州 363000

摘 要：对无向双环网络最短路径唯一表示问题进行刻画，给出了紧优无向双环网络具有最短路径表示的一个充要条件。最后证明了一类具有唯一最短路径表示的紧优无向双环网络，其强彩虹连通数必大于或等于该网络的直径加1。

关键词：无向双环网络；最短路径；彩虹路；强彩虹连通数

中图分类号：O157. 5 **文献标志码：**A **文章编号：**2097－0137（2022）05－0159－06

A lower bound estimation about strong rainbow connectivity of optimal undirected double-loop networks

LIU Jie[1,2], *CHEN Baoxing*[1,3], *ZHONG Wei*[1,3]

1. *College of Computer Science, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China*
2. *Sanming Medical and Polytechnic Vocational College, Sanming 365000, China*
3. *Key Laboratory of Data Science and Intelligence Application, Fujian Province University, Zhangzhou 363000, China*

Abstract: The uniqueness of the shortest path representation of an undirected double-loop network is characterized, and a necessary and sufficient condition for an optimal undirected double-loop network which has the shortest path representation is given. Finally, it is proven that for a class of optimal undirected double-loop networks which have the shortest path representation, its strong rainbow connection number is greater than or equal to the diameter of the network plus 1.

Key words: undirected double-loop network; the shortest path; rainbow path; strong rainbow connection number

设G是非平凡连通图，可定义图为$G=(V,E)$，其中顶点集和边集分别用$V(G)$，$E(G)$表示。图的连通性有广泛的实际应用，比如通信网络的结构可以用图来表示，其中顶点代表不同的处理机或用户，边集代表了通信线路，构造出可靠最优的通信网络具有很强的实用价值，这些问题可抽象为图的问题来研究。2008年Chartrand等[1]首次提出了图的彩虹连通性的概念，作为此概念的一种加强，他们在此论文中也介绍了强彩虹连通的概念。关于图的(强)彩虹连通方面的一些定义，请读者参考文献[2]。

双环网络是计算机互联网络、大规模并行处理系统和通信系统的一类重要拓扑结构，双环网络最优直径策略研究以及双环网络最优构造法等方面受到许多学者的重视[2-6]，并得出不少结论。由于图的彩虹

* **收稿日期：**2020－12－01 **录用日期：**2021－04－02 **网络首发日期：**2022－03－08
基金项目：福建省高校科研专项项目(JK2017031)；福建省中青年项目(JAT170361,JAT191506)
作者简介：刘杰(1973年生)，男；**研究方向：**图论及其应用；E-mail：liusir5566@126. com
通信作者：陈宝兴(1961年生)，男；**研究方向：**网络优化设计分析；E-mail：cbaoxing@126. com

连通数在网络安全与密码管理中有重要的应用，而决定图的彩虹连通数问题是NP困难的，因此彩虹连通图的着色方法近几年来已成为图论的热门研究问题[1,7-9]，文献[10]得出一类边染色临界图的独立数。文献[11]探究了线性多边形链彩虹着色问题。文献[12]给出了某类含圈图的修正的彩虹顶点连通数。文献[13]研究了三类特殊图的(强)彩虹连通数，并得到了它的精确值。文献[14]与文献[15]分别给出一类有向与无向环型网络彩虹连通一种着色方法,并确定了其彩虹连通数的一个上界。

众所周知，网络的强彩虹连通数必大于或等于该网络的直径。容易验证图1所示的无向双环网络 $G(8;\pm1,\pm3)$，其强彩虹连通数等于该网络的直径2。本文对无向双环网络最短路径唯一表示问题进行刻画，给出了紧优无向双环网络具有最短路径表示的一个充要条件，最后证明了一类具有唯一最短路径表示的紧优无向双环网络，其强彩虹连通数必大于或等于该网络的直径加1。

1 定义及引理

设 $1\leqslant h<n, h\neq n/2$，无向双环网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 可定义为无向图 $(V(G),E(G))$，其中顶点集为 $V(G)=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，边集是 $E(G)=\{j\rightarrow j+1(\mathrm{mod}\,n),\ j\rightarrow j-1(\mathrm{mod}\,n),\ j\rightarrow j+h(\mathrm{mod}\,n),\ j\rightarrow j-h(\mathrm{mod}\,n)\mid j=0,1,2,\cdots,n-1\}$. 图1 $G(8;\pm1,\pm3)$ 表示为有8个顶点的无向双环网络。

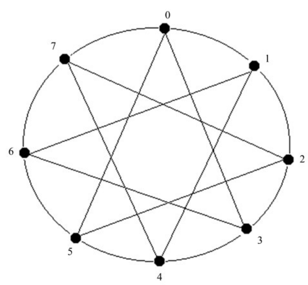

图1 无向双环网络 $G(8;\pm1,\pm3)$

Fig. 1 Undirected double-loop network $G(8;\pm1,\pm3)$

对于双环网络 $G(n;\pm1,\pm h)$，定义点 j 到点 $(j+1)(\mathrm{mod}\,n)$ 的边为[+1]，点 j 到点 $(j-1)(\mathrm{mod}\,n)$ 的边为[−1]。点 j 到点 $(j+h)(\mathrm{mod}\,n)$ 的边为[$+h$]，点 j 到点 $(j-h)(\mathrm{mod}\,n)$ 的边为[$-h$]。若一条从点 v_1 到点 v_2 的路径，它包含 x_1 个[+1]与 x_2 个[−1]边，y_1 个[$+h$]与 y_2 个[$-h$]边，则有 $l\equiv(j+x_1-x_2+y_1h-y_2h)(\mathrm{mod}\,n)$，并且模等式成立和边的顺序无关，从而路径可表示为：$x_1[+1]+x_2[-1]+y_1[+h]+y_2[-h]$.

设 v_1，v_2 是 $G(n;\pm1,\pm h)$ 中的两个顶点，$x_1[+1]+x_2[-1]+y_1[+h]+y_2[-h]$ 为点 v_1 到点 v_2 的一条最短路径，那么 x_1、x_2 中至少有一个是0，y_1、y_2 中至少有一个是0. 点 v_1 到点 v_2 最短路径的边仅含[+1]和[$+h$]，或仅含[−1]和[$+h$]，或仅含[+1]和[$-h$]或仅含[−1]和[$-h$]. 可表示为：$x[+1]+y[+h]$，这里 $x,y\in\mathbf{Z}$.

设 $x_1[+1]+y_1[+h], x_2[+1]+y_2[+h]$ 是从点 v_1 到点 v_2 的任意两条最短路径，且可推出 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$，则称从点 v_1 到点 v_2 的最短路径表示唯一。

若一个无向双环网络的任意两个结点间均有唯一的最短路径表示，则称此网络具有唯一最短路径表示。

例1 无向双环网络 $G(8;\pm1,\pm3)$,从0到2的最短路径可表示为：$2[+1]+0[+3]$, $(-1)[+1]+1[+3]$, 或 $0[+1]+(-2)[+3]$. 此网络不具有唯一最短路径表示。

文献[1]给出了由 $G(n;\pm t_1,\pm t_2)$ 所确定同余方程最小非负解与交叉解的定义，并给出了 $G(n;\pm t_1,\pm t_2)$ 直径公式，可参见定理1。

定义1 称同余式

$$x+yh\equiv0(\mathrm{mod}\,n)\tag{1}$$

为无向双环网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 所对应的同余方程。

定义2 设 $a_1,a_2\in\mathbf{Z}$，若有同余式 $a_1+a_2h\equiv0(\mathrm{mod}\,n)$，则称格点 (a_1,a_2) 为零格点。对于零格点

(a_1,a_2)，若a_1+a_2为偶数，则称其为偶零格点；若a_1+a_2为奇数，则称其为奇零格点。

定义3　设$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{Z}$，称$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$为两格点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$间的距离。

定理1[3]　给定$G(n;\pm1,\pm h)$，其中n,h是正整数，$1\leqslant h<n$，$h\neq n/2$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为(u,v)与$(-a,b)$. 设$r_1=\lfloor(u+v)/2\rfloor$，$r_2=\lfloor(a+b)/2\rfloor$，$r_3=\lfloor(|u-a|+v+b)/2\rfloor$，$r_4=\lfloor(u+a+|v-b|)/2\rfloor$，$d_1=\max\{r_1,r_2,\min\{r_3,r_4\}\}$. 当$(u+a)(v+b)\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$且$r_3=r_4$时图$G(n;\pm1,\pm h)$直径$D(G)$等于$r_3-1$；否则，直径$D(G)=d_1$.

由定理1，可得如下推论。

推论1　给定$G(n;\pm1,\pm h)$，其中n,h是正整数，$1\leqslant h<n,h\neq n/2$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为(u,v)与$(-a,b)$. 设d为网络$G(n;\pm1,\pm h)$的直径，则$u+v\leqslant 2d+1$，$a+b\leqslant 2d+1$.

2　主要结果

引理1　给定$G(n;\pm1,\pm h)$，其中n,h是正整数，$1\leqslant h<n,h\neq n/2$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为(u,v)与$(-a,b)$. 设$G(n;\pm1,\pm h)$具有唯一最短路径表示，则$u+v$与$a+b$均为奇数。

证明　设d为网络$G(n;\pm1,\pm h)$的直径。不妨设$u\geqslant v$（当$u<v$时类似可证）。现证明$u+v$为奇数，类似可证$a+b$为奇数。用反证法，若$u+v$为偶数，由定理1的推论，可知$u+v\leqslant 2d$.

令$t=(u+v)/2$. 因为$u+v$为偶数，所以u,v同时为偶数，或同时为奇数。不妨设u,v都是偶数。易证网络$G(n;\pm1,\pm h)$中从0到$(u/2)+(v/2)h$的距离为t. 注意到$(u/2)[+1]+(v/2)[+h]$与$-(u/2)[+1]-(v/2)[+h]$均是从0到$(u/2)+(v/2)h$的最短路径。这与$G(n;\pm1,\pm h)$具有唯一最短路径表示矛盾！　证毕

引理2　给定$G(n;\pm1,\pm h)$，其中n,h是正整数，$1\leqslant h<n,h\neq n/2$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为(u,v)与$(-a,b)$. 设d为网络$G(n;\pm1,\pm h)$的直径，$G(n;\pm1,\pm h)$具有唯一最短路径表示，则

(i) 当$u\geqslant v$时，有$v=a$，且$u+b=2d+2$；

(ii) 当$u<v$时，有$u=b$，且$a+v=2d+2$.

证明　设$r_1=\lfloor(u+v)/2\rfloor$，$r_2=\lfloor(a+b)/2\rfloor$，$r_3=\lfloor(|u-a|+v+b)/2\rfloor$，$r_4=\lfloor(u+a+|v-b|)/2\rfloor$，$d_1=\max\{r_1,r_2,\min\{r_3,r_4\}\}$. 当$u\geqslant v$时，可证$a<u,a\leqslant b,v<b$(见文献[3]的引理5)。当$u<v$时，可证$a>u,a>b,v>b$(见文献[3]的引理4)。

先证图$G(n;\pm1,\pm h)$具有唯一最短路径表示时，$(u+a)(v+b)\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$并且$r_3=r_4$.

以下先证明$u\geqslant v$的情形，当$u<v$时，同理可证。

用反证法，若$(u+a)(v+b)\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$并且$r_3=r_4$不成立，由定理1可知$d=\max\{r_1,r_2,\min\{r_3,r_4\}\}$. 因此$\min\{r_3,r_4\}\leqslant d$.

情形1：当$r_3\leqslant r_4$时，可得$r_3\leqslant d$. 因为$u+v$与$a+b$均为奇数，所以$u-a+v+b$是偶数。从而$u-a,v+b$同时为偶数，或同时为奇数。不妨设$u-a,v+b$都是奇数。易证网络$G(n;\pm1,\pm h)$中从0到$(u-a+1)/2+(v+b-1)/2*h$的距离为$r_3\leqslant d$. 注意到$(u-a+1)/2[+1]+(v+b-1)/2*[+h]$与$-(u-a-1)/2[+1]-(v+b+1)/2*[+h]$均是从0到$(u-a+1)/2+(v+b-1)/2*h$的最短路径。这与$G(n;\pm1,\pm h)$具有唯一最短路径表示矛盾！

情形2：当$r_4<r_3$时，类似地，易证得与假设矛盾。

当$(u+a)(v+b)\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$并且$r_3=r_4$时，则$G(n;\pm1,\pm h)$的直径$d=r_3-1$，且$u+v+a+b$为偶数。

当$u\geqslant v$时，因为

$$r_3=\lfloor(|u-a|+v+b)/2\rfloor=\lfloor(u-a+v+b)/2\rfloor=(u-a+v+b)/2,$$
$$r_4=\lfloor(u+a+|v-b|)/2\rfloor=\lfloor(u+a-v+b)/2\rfloor=(u+a-v+b)/2,$$

所以有$(u-a+v+b)/2=(u+a-v+b)/2$，即$v=a$. 又因为$d=r_3-1=(u-a+v+b)/2-1=(u+b)/2-1$，因此$u+b=2d+2$.

当$u<v$时，因为

$$r_3=\lfloor(|u-a|+v+b)/2\rfloor=\lfloor(a-u+v+b)/2\rfloor=(a-u+v+b)/2,$$

$$r_4 = \lfloor (u + a + |v - b|)/2 \rfloor = \lfloor (u + a + v - b)/2 \rfloor = (u + a + v - b)/2,$$

所以有 $(a - u + v + b)/2 = (u + a + v - b)/2$，即 $u = b$．又因为 $d = r_3 - 1 = (a - u + v + b)/2 - 1 = (a + v)/2 - 1$，因此 $a + v = 2d + 2$． 证毕

引理3 给定 $G(n;\pm1,\pm h)$，其中 n,h 是正整数，$1 \leqslant h < n, h \neq n/2$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为 (u,v) 与 $(-a,b)$．设 d 为网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 的直径，且 $d \geqslant 4$．若网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 是紧优的 $\left(\text{即 } d = \left\lceil \frac{\sqrt{2n-1}-1}{2} \right\rceil\right)$，且当 $u \geqslant v$ 时，$v = a$ 且 $u + b = 2d + 2$；当 $u < v$ 时，$u = b$ 且 $a + v = 2d + 2$，则有 $u + v > d$ 且 $a + b > d$．

证明 注意到当网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 是紧优的，且其直径为 d 时，有 $2d^2 - 2d + 2 \leqslant n \leqslant 2d^2 + 2d + 1$。

以下就 $u \geqslant v$ 情形给予证明。当 $u \geqslant v$ 时，可证得 $a \leqslant b$（见文献[3]的引理5）。

用反证法，若 $u + v \leqslant d$，因为

$$n = ub + va = ub + v^2 = u(2d + 2 - u) + (u + v - u)^2 \leqslant u(2d + 2 - u) + (d - u)^2 = d^2 + 2u \leqslant d^2 + 2d,$$

注意到当 $d \geqslant 4$ 时，$n \leqslant d^2 + 2d < 2d^2 - 2d + 2$，这与 $n \geqslant 2d^2 - 2d + 2$ 矛盾！

若 $a + b \leqslant d$，因为

$$n = ub + va = ub + a^2 = b(2d + 2 - b) + (a + b - b)^2 \leqslant b(2d + 2 - b) + (d - b)^2 = d^2 + 2b \leqslant d^2 + 2d,$$

注意到当 $d \geqslant 4$ 时，$n \leqslant d^2 + 2d < 2d^2 - 2d + 2$，这与 $n \geqslant 2d^2 - 2d + 2$ 矛盾！

当 $u < v$ 时，类似可证结论 $u + v > d$ 且 $a + b > d$ 成立。

引理4 给定 $G(n;\pm1,\pm h)$，其中 n,h 是正整数，$1 \leqslant h < n, h \neq n/2$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为 (u,v) 与 $(-a,b)$．设 d 为网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 的直径，且 $d \geqslant 4$。若网络 $G(n;\pm1,\pm h)$ 是紧优的 $\left(\text{即 } d = \left\lceil \frac{\sqrt{2n-1}-1}{2} \right\rceil\right)$，则 $G(n;\pm1,\pm h)$ 具有唯一最短路径表示的充要条件是 $u + v$ 与 $a + b$ 均为奇数，而且

(i) 当 $u \geqslant v$ 时，有 $v = a$ 且 $u + b = 2d + 2$；

(ii) 当 $u < v$ 时，有 $u = b$ 且 $a + v = 2d + 2$．

证明 必要性可由引理1和引理2得到。现证充分性，若 $G(n;\pm1,\pm h)$ 不具有唯一最短路径表示，则存在一个结点 i，使得从0到 i 的最短路径表示不唯一。不妨设 $u \geqslant v$（当 $u < v$ 时类似可证）。注意到 $d(0,i) \leqslant d$.

设 $x_1[+1] + y_1[+h], x_2[+1] + y_2[+h]$ 是从0到 i 的两个最短路径表示，这里 $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$．注意到 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ 是零格点。

若 $x_1 - x_2, y_1 - y_2$ 同号（同为正或同为负），不妨设 $x_1 - x_2, y_1 - y_2$ 同为正。由引理3，可知 $2u + 2v > 2d$．零格点 $(u - a, b + v)$, $(2u, 2v)$ 均在直线 $x + y = 2d$ 的右侧，而且零格点 $(u + a, v - b)$ 在第四象限中。与零格点 $C(u - a, b + v)$ 相邻的4个格点：$B(u,v), D(-a,b)$, $(u - 2a, 2b + v)$, $(2u - a, b + 2v)$ 均是奇零格点（见图2）。

因为

$$u - 2a + 2b + v \geqslant u - a + b + v + (b - a) \geqslant u - a + b + v = 2d + 2,$$
$$2u - a + b + 2v \geqslant u - a + b + v + (u + v) > u - a + b + v = 2d + 2,$$

因此 $(u - 2a, 2b + v)$, $(2u - a, b + 2v)$ 均在直线 $x + y = 2d$ 的右侧。因此在第一象限中，由 x 轴，y 轴，及直线 $x + y = 2d$ 围成的区域 Ω 中，至多只有一个零格点 (u,v), (u,v) 是一个奇零格点。因为 $x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = 2d(0,i) \leqslant 2d$，故偶零格点 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ 在 Ω 中，这与区域 Ω 中不含偶零格点矛盾！

若 $x_1 - x_2, y_1 - y_2$ 异号，不妨设 $x_1 - x_2 \leqslant 0$, $y_1 - y_2 \geqslant 0$．由引理3，可知 $2a + 2b > 2d$．因此零格点 $(-u - a, b - v)$, $(-2a, 2b)$ 均在直线 $y = x + 2d$ 的左侧。与零格点 $C(-u - a, b - v)$ 相邻的4个格点：$D(-a,b)$, $(-u, -v)$, $(-u - 2a, 2b - v)$, $(-2u - a, b - 2v)$ 均是奇零格点。且因为

$$u + 2a + 2b - v \geqslant u + a + b - v + (a + b) > u + a + b - v = 2d + 2,$$
$$2u + a + b - 2v \geqslant u + a + b - v + (u - v) \geqslant u + a + b - v = 2d + 2,$$

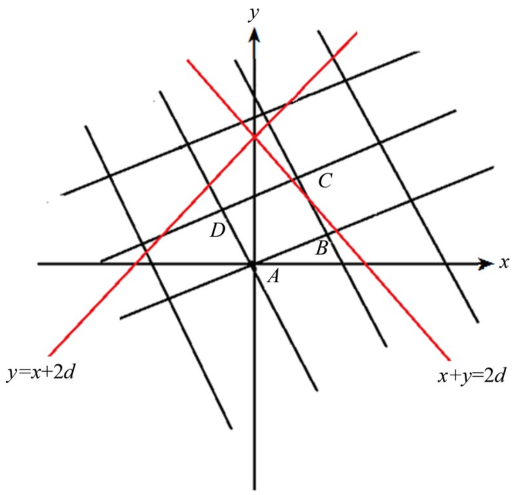

图2　零格点$A(0,0)$, $B(u,v)$, $C(u-a,b+v)$, $D(-a,b)$位置示意图

Fig. 2　A location diagram of zero lattice points $A(0,0)$, $B(u,v)$, $C(u-a,b+v)$, $D(-a,b)$

因此$(-u-2a,2b-v)$, $(-2u-a,b-2v)$均在直线$y=x+2d$的左侧。另外$(-u,-v)$在第三象限中。在第二象限中，由x轴，y轴，及直线$y=x+2d$围成的区域Σ中，至多只有一个零格点$(-a,b)$, $(-a,b)$是一个奇零格点。因为$-(x_1-x_2)+y_1-y_2=2d(0,i)\leqslant 2d$，故偶零格点$(x_1-x_2,y_1-y_2)$在$\Sigma$中，这与区域$\Sigma$中不含偶零格点矛盾！　证毕

引理5　设t是一个正整数且$2\leqslant t<n$. 对于无向环形网络$G(n;\pm1)$，若$t\nmid n$，则使得$G(n;\pm1)$中长度不超过t的任一条路径都是彩虹路至少需要用$t+1$种颜色对$G(n;\pm1)$边着色。

证明　因为$t\nmid n$，可设$n=pt+q$，这里$0<q<t$. 若只用t种颜色对$G(n;\pm1)$边着色，从0到t的路径是彩虹路，其路径上的t条边均应着不同的颜色，不妨设分别着色为$1,2,\cdots,t$. 从1到$t+1$的路径也是彩虹路，因此t到$t+1$的边应着色为1。从2到$t+2$的路径也是彩虹路，因此$t+1$到$t+2$的边应着色为2。因此从t到$2t$的路径上边的着色与从0到t的路径上的边着色相同，分别着色为$1,2,\cdots,t$. 类似地，从$2t$到$3t$的路径上边的着色,……从$(p-1)t$到pt的路径上边的着色，也应分别着色为$1,2,\cdots,t$. 从pt到n的路径上边的着色，也应分别着色为$1,2,\cdots,q$. 这导致了从pt到1的路径上边的着色为$1,2,\cdots,q,1$。从pt到1的路径不是彩虹路，其长度$q+1\leqslant t$. 因此若仅使用t种颜色对$G(n;\pm1)$边着色，无法保证任一条长度不超过t的路径均是彩虹路。　证毕

推论2　设t是一个正整数且$2\leqslant t<n$. 对于无向环形网络$G(n;\pm h)$, $1\leqslant h<n, h\neq n/2$，若$t\nmid n$且$t<n/\gcd(n,h)$，这里$\gcd(n,h)$表示$n,h$的最大公因数，则使得$G(n;\pm h)$中长度不超过$t$的任何一条路径都是彩虹路至少需要用$t+1$种颜色对$G(n;\pm h)$边着色。

证明　记$m=n/\gcd(n,h)$. 因$t\nmid n$，故$t\nmid m$. 因为网络$G(n;\pm h)$有$\gcd(n,h)$个圈，每个圈的长度为m. 对于网络$G(n;\pm h)$中的某个圈,与引理5的证明类似，至少需用$t+1$种颜色对这个圈的边进行着色。证毕

定理2　给定$G(n;\pm1,\pm h)$，其中n,h是正整数，$1\leqslant h<n$，$h\neq n/2$. 设d为网络$G(n;\pm1,\pm h)$的直径，且$d\nmid n, d\geqslant 4$，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别为(u,v)与$(-a,b)$. 若网络$G(n;\pm1,\pm h)$是紧优的，具有唯一最短路径表示，且$u+v=2d+1$或$a+b=2d+1$，则使得$G(n;\pm1,\pm h)$中任给两点间的最短路径有一条是彩虹路至少需用$d+1$种颜色对$G(n;\pm1,\pm h)$边着色。

证明　我们就当$u\geqslant v$时给予证明(当$u<v$时，类似可证)。因为$u+v, a+b$均为奇数，所以有$u>v, a<b$. 当$u+v=2d+1$，可知$u\geqslant d+1$。现证$d(0,d)=d$. 因为$a=v\leqslant d$，所以$d-a\geqslant 0$。注意到格点$(d-a,b)$到4个零格点$(0,0)$, (u,v), $(u-a,b+v)$, $(-a,b)$的距离分别为：$d-a+b, d+2, d+1, d$. 因为$d-a+b>d$，$(d-a)+bh\equiv d\pmod n$，所以$d(0,d)=d$. 因此从0到d的最短路径为：$d[+1]+0[+h]$. 从而在$G(n;\pm1,\pm h)$中从0到d，1到$d+1,\cdots,n-d$到$0,\cdots,n-1$到$d-1$的最短路径，与在$G(n;\pm1)$中的最短路径相同，据引理5可知，则使得$G(n;\pm1,\pm h)$中任给两点间的最短路径有一条是彩虹路至少需用

$d+1$种颜色对$G(n;\pm1, \pm h)$边着色。

当$a+b=2d+1$，可知$b \geqslant d+1$. 记$m=n/\gcd(n,h)$. 现证$d<m$. 若$d \geqslant m$，因为$mh \equiv 0 (\bmod n)$，所以$(-a, b-m)$是同余方程(1)的交叉解，这与$(-a,b)$是同余方程(1)的最小交叉解矛盾。

现证$d(0,dh)=d$. 因为$v=a \leqslant d$，所以$d-v \geqslant 0$. 注意到格点$(0,d)$到4个零格点$(0,0)$, (u,v), $(u-a, b+v)$, $(-a,b)$的距离分别为：$d, u+d-v$, $d+2, d+1$. 因为$u+d-v>d$，所以$d(0,dh)=d$. 因此从0到dh的最短路径为：$0[+1]+d[+h]$. 从而在$G(n;\pm1, \pm h)$中从0到dh，1到$dh+1, \cdots, n-1$到$dh-1$的最短路径，与在$G(n;\pm h)$中的最短路径相同，据引理5的推论2可知，则使得$G(n;\pm1, \pm h)$中任给两点间的最短路径有一条是彩虹路至少需用$d+1$种颜色对$G(n;\pm1, \pm h)$边着色。 证毕

例2

（i）对于无向双环网络$G(2t^2+2t+1;\pm1, \pm(2t+1))$(这里$t$是正整数，$t \geqslant 4$)，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别是$(t+1,t)$、$(-t, t+1)$. 利用定理1，易求得网络$G(2t^2+2t+1;\pm1, \pm(2t+1))$的直径为$t$，因此网络$G(2t^2+2t+1;\pm1, \pm(2t+1))$是紧优的。因为$u=t+1, v=t, a=t, b=t+1$，所以有$u \geqslant v, v=a, u+b=2t+2$, 且$u+v$与$a+b$均是奇数。因此依据引理4，$G(2t^2+2t+1;\pm1, \pm(2t+1))$具有唯一最短路径表示。注意到$u+v=2t+1$，据定理2，$G(2t^2+2t+1;\pm1, \pm(2t+1))$的强彩虹连通数至少是该网络的直径加1。

（ii）对于无向双环网络$G(2t^2+1;\pm1, \pm(2t^2-2t))$(这里$t$是正整数，$t \geqslant 4$)，同余方程(1)的最小非负解与交叉解分别是$(t-1,t)$、$(-t-2, t-1)$. 利用定理1，易求得网络$G(2t^2+1;\pm1, \pm(2t^2-2t))$的直径为$t$，因此网络$G(2t^2+1;\pm1, \pm(2t^2-2t))$是紧优的。因为$u=t-1, v=t, a=t+2, b=t-1$，所以有$u<v, u=b, a+v=2t+2$，且$u+v$与$a+b$均是奇数。因此依据引理4，$G(2t^2+1;\pm1, \pm(2t^2-2t))$具有唯一最短路径表示。注意到$a+b=t+2+t-1=2t+1$，据定理2，$G(2t^2+1;\pm1, \pm(2t^2-2t))$的强彩虹连通数至少是该网络的直径加1。

参考文献:

[1] CHARTRAND G, JOHNS G, MCKEON K, et al. Rainbow connection in graphs [J]. Mathematica Bohemica, 2008, 133(1): 85-98.

[2] CHEN B X, MENG J X, XIAO W J. Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2006, 8(1): 299-312.

[3] CHEN B X, MENG J X, XIAO W J. A diameter formula for an undirected double-loop network [J]. Ars Combinatoria, 2009, 90: 395-404.

[4] 李乔, 徐俊明, 张忠良. 最优双环网络的无限族[J]. 中国科学(A辑), 1993, 23(9): 979-992.

[5] 徐俊明, 刘琦. 一类 4 紧优双环网无限族[J]. 中国科学(A辑), 2003, 33(1): 71-74.

[6] 陈协彬. 步长有限制的双环网络的最优路由算法[J]. 计算机学报, 2004, 27(5): 596-603.

[7] KRIVELEVICH M, YUSTER R. The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree [J]. Graph Theory, 2010, 63(3): 185-191.

[8] SCHIERMEYER I. Rainbow connection in graphs with minimum degree three [C]//International Workshop on Combinatorial Algorithms, IWOCA, Hradec Nad Moravicí, Czech Republic, DBLP, 2009.

[9] 董九英, 李学良. 图的彩虹连通数与最小度和[J]. 中国科学(数学), 2013, 43(1): 7-14.

[10] 齐林明, 苗连英, 李卫奇. 关于边染色临界图的独立数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2015(1): 114-119.

[11] 王燕,王建军. 线性多边形链的彩虹路连通性[J]. 数学进展, 2012, 41(4): 418-422.

[12] 王万禹. 图的修正的彩虹顶点连通数[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(2): 27-31.

[13] 赵燕, 柴航. 三类特殊图的(强)彩虹连通数[J]. 纯粹数学与应用数学, 2018, 34(3): 309-315.

[14] 刘欣欣, 陈宝兴, 钟玮. 有向双环网络的彩虹路连通性[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2014, 53(6): 787-791.

[15] 刘杰, 陈宝兴. 无向双环网络的强彩虹连通性[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2019, 58(6): 873-877.

（责任编辑 冯兆永）